

MAT 1739 - Cours 3

Limites et continuité (Part I)

Automne 2019

Table des matières

1 Suites et limite de suite	1
1.1 Définition d'une suite numérique	1
1.2 Limite d'une suite : première approche	1
1.3 Aller plus loin	2
2 Limites et fonctions	2
2.1 Limite à droite, limite à gauche, existence de la limite	2
2.2 Opérations sur les limites	3
2.3 Fonctions continues	4

Rappels : La formule $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nous permet d'estimer la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ lorsque la valeur de h s'approche de 0. Pour avoir la valeur exacte de cette pente, on va faire tendre h vers 0 et utiliser la notion de limite.

1 Suites et limite de suite

1.1 Définition d'une suite numérique

Définition 1. Une *suite (numérique)* est une fonction u à valeur dans \mathbb{R} dont le domaine de définition I est une partie des entiers naturels \mathbb{N} . On note souvent u_n à la place de $u(n)$; ce nombre est appelé le n -ème terme de la suite u . La suite u est parfois aussi notée $(u_n)_{n \in I}$.

Remarque. Dans la plupart des exemples rencontrés dans ce cours, on aura $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Exemples.

- La suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est la suite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Son 100-ème terme est $u_{100} = \frac{1}{100} = 0.01$.
- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = n^2$ est la suite de premiers termes $0, 1, 4, 9, 16, \dots$.
- Les termes pairs de la suite de terme général $t_n = (-1)^n$ sont égaux à 1, tandis que les termes impairs valent -1 .

1.2 Limite d'une suite : première approche

De manière un peu informelle une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend (ou converge) vers une limite $l \in \mathbb{R}$ si u_n est aussi proche de l que l'on veut pour toute valeur assez grande de n . Autrement dit, plus n est grand, plus u_n est proche de l . On note alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

(se lit " u_n tend vers l lorsque n tend vers l'infini").

Exemples.

- Une suite ne converge pas forcément. Par exemple, la suite de terme $t_n = n^2$ ne converge pas : 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... devient de plus en plus grand.
- La suite de terme $t_n = (-1)^n$ n'a pas de limite non plus lorsque n tend vers l'infini bien qu'elle soit bornée (les termes de la suite sont 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...).
- La suite de terme $t_n = \frac{1}{n}$ ($n > 0$) converge vers 0 : plus l'entier n est grand, plus t_n est proche de 0.

1.3 Aller plus loin

La définition suivante est la définition formelle de la notion de limite. C'est à partir d'elle que l'on peut donner des preuves mathématiques rigoureuses. Elle n'est toutefois pas exigée au programme et s'adresse à celles et à ceux qui aimeraient approfondir la notion.

Définition 2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_n$ converge vers l et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N \geq 0$ tel que si $n \geq N$, alors $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

2 Limites et fonctions

2.1 Limite à droite, limite à gauche, existence de la limite

Première approche

Tableau de valeurs pour la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ (les valeurs sont arrondies au centième) :

x	2.5	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1	3.5
$f(x)$	4.25	6.41	6.94	6.99	7	7.001	7.06	7.61	10.25

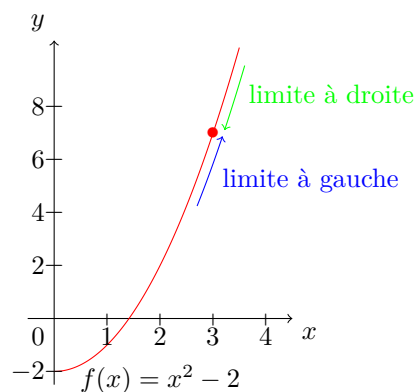
Lorsque x tend vers 3 à gauche de 3 (c'est-à-dire $x < 3$) $f(x)$ tend vers 7. On note

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7.$$

Début Cours 4

De même, lorsque x tend vers 3 à droite de 3 (c'est-à-dire $x > 3$) $f(x)$ tend aussi vers 7. On note

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 7.$$



Définition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathbb{R}$. De manière un peu informelle on dit que f admet une limite à gauche (resp. à droite) en a si $f(x)$ converge vers une réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a en étant $< a$ (resp. $> a$). On note alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l),$$

qui se lit “la limite à droite (resp. à gauche) lorsque x tend vers a est égale l ”.

Autrement dit, si f admet une limite à gauche (resp. à droite) en a qui vaut l , cela signifie que $f(x)$ est aussi proche de l que l’on veut pour tout $x < a$ (resp. $x > a$) suffisamment proche de a .

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite de f en a existe si et seulement si

- (a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe (la limite à gauche existe).
- (b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe (la limite à droite existe).
- (c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (les limites à gauche et à droite sont égales).

Dans cas, en écrivant $l = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, on note

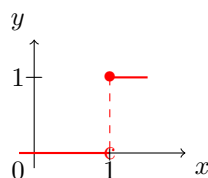
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

(se lit “la limite lorsque x tend vers a de $f(x)$ est égale à l ”).

Exemple. En reprenant l’exemple précédent avec $f(x) = x^2 - 2$, comme $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 7$ la limite de f en 3 existe vaut 7, ce qu’on peut écrire

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7.$$

En revanche sur le dessin suivant, la limite de f en 1 n’existe pas car $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.



2.2 Opérations sur les limites

Les propriétés suivantes fournissent des outils pour calculer les limites. Soient $a \in \mathbb{R}$, f, g deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent, et c une constante quelconque.

Proposition 5. Sous les hypothèse précédentes, on a :

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- (e) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- (f) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$

(g) On suppose $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

(h) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$)

(i) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ (si la racine existe).

Attention ! Vérifiez bien que les limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent bien avant d'utiliser ces formules. Par exemple, si on prend $f(x) = g(x) = 1/x$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas, et pourtant on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - g(x) = 0$.

Exemples.

- $\lim_{x \rightarrow -1} 5 = 5$ et $\lim_{x \rightarrow 7} x = 7$.

- Calcul de $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^4 - 5x$?

On utilise les propriétés précédentes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 3x^4 - 5x &= \lim_{x \rightarrow 2} 3x^4 - \lim_{x \rightarrow 2} 5x \quad (\text{on sépare les sommes}) \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^4 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x \quad (\text{on "sort" les constantes}) \\ &= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^4 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x \\ &= 3 \times (2)^4 - 5 \times 2 \\ &= 3 \times 16 - 10 = 48 - 10 = 38. \end{aligned}$$

2.3 Fonctions continues

Définition 6. Une fonction $f : x \rightarrow f(x)$ est *continue en* $x = a$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

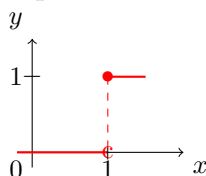
- $f(a)$ est défini (c'est-à-dire que a appartient au domaine de définition de f).
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue sur un intervalle I de \mathbb{R} si f est continue en tout point $x \in I$.

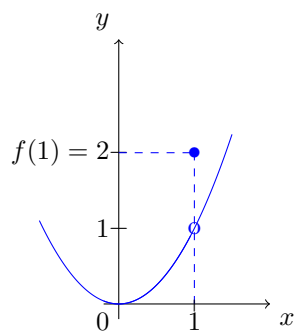
De manière approximative, une fonction f est continue si on peut tracer son graphe "sans lever son crayon".

(Ce qui suit sera fait au prochain cours)

Exemples. La fonction suivante n'est pas continue en 1 : la condition (b) n'est pas satisfaite.



La fonction suivante n'est pas continue en 1 : la condition (b) est satisfaite mais la condition (c) ne l'est pas : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ mais $f(1) = 2 \neq 1$.



Exemples.

- (a) Les fonctions polynomiales sont continues sur \mathbb{R} .
- (b) Les fonctions rationnelles sont continues en tout point où elles sont définies.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- (d) Les fonctions cos et sin sont continues sur \mathbb{R} .
- (e) Les fonctions exp et ln sont continues sur \mathbb{R} et $]0, +\infty[$ respectivement.

Pour la culture...

Que dire de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$?

Réponse : elle n'est continue en aucun point $x \in \mathbb{R}$.